

## CHAPITRE

## 4

Vecteurs, droites et plans  
de l'espace

Ce qu'il faut savoir faire :

## 1/ Vecteurs de l'espace.

On étend à l'espace la notion de vecteur vue dans le plan (définition, opérations, propriétés dont la relation de Chasles, colinéarité, règles de calcul sur les coordonnées).

**Définition**

Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace.

Tout vecteur de la forme  $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$  avec  $\alpha, \beta, \gamma$  trois nombres réels est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ .

**Définition**

Trois vecteurs sont **coplanaires** s'ils possèdent des représentants appartenant à un même plan.

**Propriété**

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires de l'espace.

Les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont **coplanaires** si et seulement si il existe un couple de réels  $(\alpha; \beta)$  tel que  $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ .

## 2/ Droites de l'espace.

**Définition**

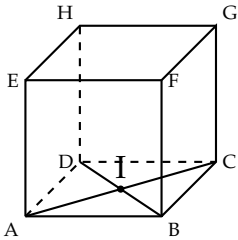
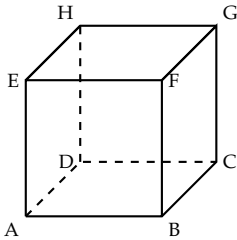
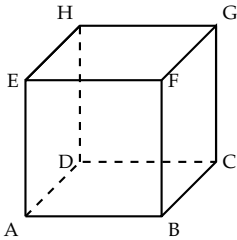
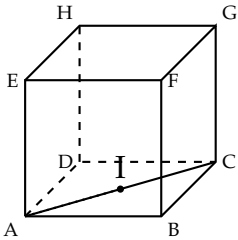
Soit A un point de l'espace et  $\vec{u}$  un vecteur non nul. L'ensemble des points M de l'espace tels que  $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$  avec  $k \in \mathbb{R}$  est une **droite**.

On dit que  $\vec{u}$  est un **vecteur directeur** de cette droite.

**Propriété**

Deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , sont parallèles si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

**Position relative de deux droites :** (ABCDEFGH est un cube)

Droites coplanaires (dans un même plan)		Droites non coplanaires
Droites sécantes	Droites parallèles	
 <p>(AC) et (BD) sont sécantes en I.</p>	 <p>(EH) et (FG) sont parallèles.</p>	 <p>(EH) et (GC) sont non coplanaires.</p>
	 <p>(AI) et (AC) sont confondues.</p>	

### 3/ Plans de l'espace.

**Propriété**

Deux vecteurs non nuls et non colinéaires déterminent la direction d'un plan.

**Propriété**

Soit un point A et deux vecteurs de l'espace  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non colinéaires.

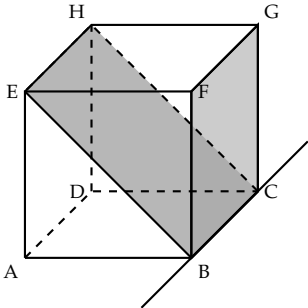
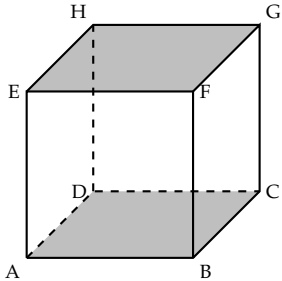
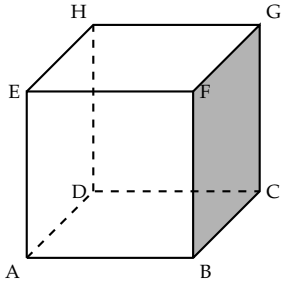
L'ensemble des points M de l'espace tels que  $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$  avec  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$  est un **plan** passant par A et dirigé par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

$(A; \vec{u}, \vec{v})$  est un **repère** du plan.

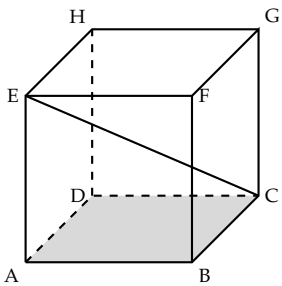
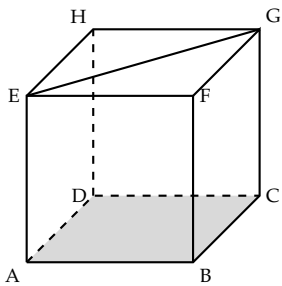
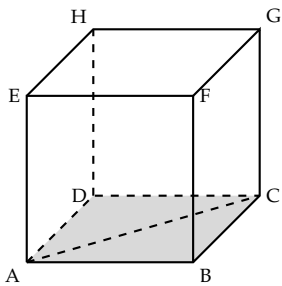
**Propriété**

Deux plans déterminés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

**Position relative de deux plans :** (ABCDEFGH est un cube)

Plans sécants	Plans parallèles	
 <p>(EBC) et (FBC) sont sécants suivant (BC).</p>	 <p>(ABC) et (EFG) sont strictement parallèles.</p>	 <p>(FBC) et (GFB) sont confondus.</p>

**Position relative d'un plan et d'une droite :**

Droite et plan sécants	Droite et plan parallèles	
 <p>(EC) et le plan (ABC) sont sécants en C.</p>	 <p>(EG) et le plan (ABC) sont strictement parallèles.</p>	 <p>(AC) est contenue dans le plan (ABC).</p>

## 4/ Base et repère de l'espace.

**Définition**

Une **base** de l'espace est formée d'un triplet de vecteurs  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  non coplanaires. Des vecteurs non coplanaires sont aussi dénommés **linéairement indépendants**.

**Propriété**

Soit  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base de l'espace.

Pour tout vecteur  $\vec{w}$  de l'espace, il existe un unique triplet de réels  $(x; y; z)$  tels que

$$\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

**Définition**

Soit  $O$  un point de l'espace, et  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  une base de l'espace.

On dit que  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est un **repère de l'espace**.

**Propriété**

Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère de l'espace.

Pour tout point  $M$  de l'espace, il existe un unique triplet  $(x; y; z)$  de réels tels que

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

On note  $M(x; y; z)$ .

Les réels  $x, y$  et  $z$  sont appelés **abscisse, ordonnée et cote** du point  $M$  et sont les **coordonnées** du point  $M$ .

**Propriétés sur les coordonnées**

Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère de l'espace.

- Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$  deux vecteurs de l'espace et  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\vec{u} + \vec{v} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} a + d \\ b + e \\ c + f \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda\vec{u} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} \lambda \times a \\ \lambda \times b \\ \lambda \times c \end{pmatrix}.$$

- Soit  $A(x_A; y_A; z_A)$ ,  $B(x_B; y_B; z_B)$ ,  $C(x_C; y_C; z_C)$  trois points non alignés de l'espace.

- $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

- le milieu  $I$  de  $[AB]$  a pour coordonnées  $I \left( \frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$

- le centre de gravité  $G$  du triangle  $ABC$  a pour coordonnées

$$G \left( \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right)$$

## 5/ Représentation paramétrique d'une droite.

### Définition

On se place dans un repère de l'espace  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ,

soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  un vecteur,  $A(x_A; y_A; z_A)$  et  $M(x; y; z)$  deux points de l'espace.

Dire que le point  $M$  appartient à la droite  $D$  passant par  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$  équivaut à dire qu'il existe un nombre réel  $t$  tel que  $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ .

Ceci est équivalent au système  $S$  :

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

Ce système est appelé **représentation paramétrique de la droite**  $D$  et  $t$  en est le paramètre.

**Exemple :**