CHAPITRE

5

Continuité

Terminale - Mathématiques Spécialité

Ce qu'il faut savoir faire :

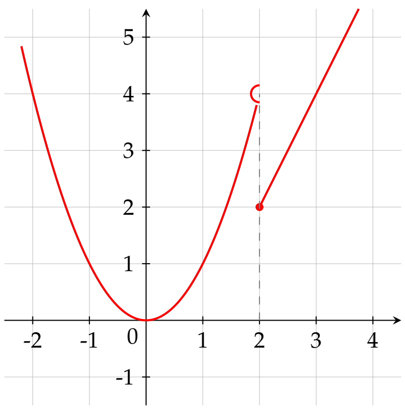
I/ Fonction continue.

Définition

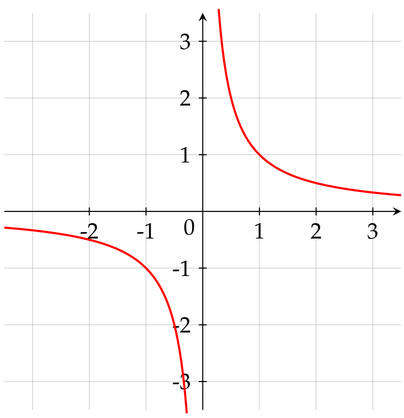
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.

- f est **continue** en a lorsque f admet une limite en a et que cette limite est $f(a)$.
- f est continue sur un intervalle I lorsqu'elle est continue en tout point a de I.

Exemples :



f n'est pas continue en 2 car : $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 2$ et $f(2) = 2$



la fonction inverse est continue sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, mais pas en 0.

Définition (intuitive) :

Une fonction f est continue sur un intervalle I si elle est définie sur I et si sa courbe représentative se trace d'un « trait continu » sans lever le crayon sur cet intervalle.

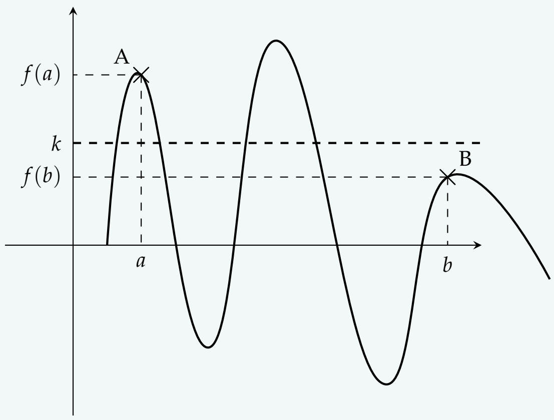
Propriétés :

- Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.
- Les fonctions affines, carré, polynômes, inverse, racine carrée, valeur absolue, exponentielle sont continues sur leur ensemble de définition.

II/ Théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème des valeurs intermédiaires (admis) :

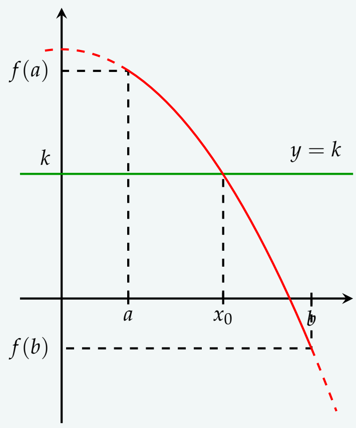
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.
Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$
l'équation $\boldsymbol{f(x) = k}$ admet au moins une solution dans $[a; b]$.



Corollaire du TVI :

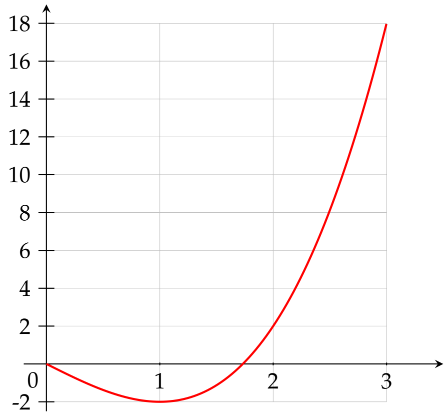
Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $\boldsymbol{f(x) = k}$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a; b]$.



Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$.
Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1;2]$.
Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.



Convention :
Une flèche dans un tableau de variations d'une fonction f indique :

- La stricte croissance ou stricte décroissance (stricte monotonie) de f sur l'intervalle.
- La continuité sur cet intervalle.

Ci-contre la fonction est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[4;7]$, continue et strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty;4]$ et $[7;+\infty[$.

x	$-\infty$		4		7		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$