Fiche d'Automatismes

Suites numériques : Limites et Calculs

Automatisme 1 : Déterminer les limites

Déterminer la limite de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = -2n^2 + 3n + 1$
2. $v_n = \left(\frac{9}{8}\right)^n$

Correction détaillée

1. **Étude de u_n :**
   On a une forme indéterminée (FI) du type "$-\infty + \infty$". Pour la lever, on factorise par le terme de plus haut degré n^2 :
   $$u_n = n^2 \left(-2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$
   On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.
   Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = -2$.
   Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$, par produit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
2. **Étude de v_n :**
   (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{9}{8}$.
   Comme $q = 1,125$, on a $q > 1$.
   D'après le cours sur les suites géométriques : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Automatisme 2 : Seuil d'une suite géométrique

(u_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 5$.
Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 300$.

Correction détaillée

L'expression du terme général est $u_n = u_0 \times q^n = 5 \times 2^n$. Cherchons par tâtonnement (la suite est strictement croissante) :

- Pour $n = 5$: $u_5 = 5 \times 2^5 = 5 \times 32 = 160 < 300$
- Pour $n = 6$: $u_6 = 5 \times 2^6 = 5 \times 64 = 320 \geqslant 300$

Conclusion : Le seuil est atteint à partir de $n = 6$.

Automatisme 3 : Calculs de termes (Récurrence)

Calculer les termes successifs des suites définies ci-dessous :

1) Suite récurrente d'ordre 1

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - 2n + 1 \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

Correction détaillée

→ **Calcul de u_1 $(n = 0)$:** $u_1 = 3 \times u_0 - 2(0) + 1 = 3 \times 2 + 1 = \mathbf{7}$

→ **Calcul de u_2 $(n = 1)$:** $u_2 = 3 \times u_1 - 2(1) + 1 = 3 \times 7 - 2 + 1 = \mathbf{20}$

2) Suite récurrente d'ordre 2

$$\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 3 \end{cases}$$

Correction détaillée

→ **Calcul de u_2 $(n = 0)$:** $u_2 = u_1 + 2u_0 = 3 + 2(1) = \mathbf{5}$

→ **Calcul de u_3 $(n = 1)$:** $u_3 = u_2 + 2u_1 = 5 + 2(3) = \mathbf{11}$

Automatisme 4 : Étudier les variations d'une suite

Pour $n \geqslant 1$, on considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = 5 + \frac{2}{n}$$

Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

Correction détaillée

Pour étudier les variations de la suite (u_n), on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \geqslant 1$:

→ **Expression de u_{n+1} :** $u_{n+1} = 5 + \dfrac{2}{n+1}$

→ **Calcul de la différence :**

$$u_{n+1} - u_n = \left(5 + \frac{2}{n+1}\right) - \left(5 + \frac{2}{n}\right)$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n}$$

→ **Mise au même dénominateur :**

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n - 2(n+1)}{n(n+1)} = \frac{2n - 2n - 2}{n(n+1)} = \frac{-2}{n(n+1)}$$

Analyse du signe : Comme $n \geqslant 1$, le dénominateur $n(n+1)$ est strictement positif. Le numérateur est -2, donc strictement négatif.
On en déduit que pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n < 0$.
Conclusion : La suite (u_n) est **strictement décroissante**.