Table des matières

Chapitre 1: Arithmétique, divisibilité et division euclidienne

Ce qu'il faut savoir faire:

I/ Divisibilité dans $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs.

Définition :

a et *b* deux entiers relatifs, on dit que *b* divise *a* et on note $b|a$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = kb$.

Vocabulaire : Dire que *b* divise *a* est équivalent à dire que :

• *b* est un **diviseur** de *a* • *a* est **divisible** par *b* • *a* est un **multiple** de *b*

Exemples :

Propositions : Soit *a* et *b* des entiers relatifs non nuls.

- La divisibilité ne dépend pas du signe : $b|a \Leftrightarrow (-b)|a \Leftrightarrow b|(-a) \Leftrightarrow (-b)|(-a)$.
- Si *b* divise *a* alors $|b| \leq |a|$.
- Si *b* divise *a* alors $|b| \leq \sqrt{|a|}$.

Conséquence : Pour donner la liste des diviseurs d'un entier *a*, il suffit de chercher ses diviseurs potentiels tels que $0 \leq b \leq \sqrt{a}$.

Exemple :

Propriétés : Soit *a*, *b*, et *c* des entiers relatifs non nuls.

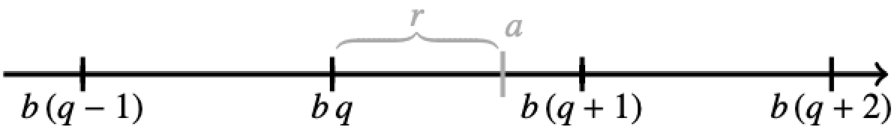
- **Transitivité :** Si $c|b$ et $b|a$ alors $c|a$.
- **Combinaison linéaire :** Si $c|b$ et $c|a$ alors pour tous entiers relatif *u* et *v*, $c|(au+bv)$.

Exemple :

II/ Division euclidienne.

Théorème : Soit *a* entier naturel et *b* un entier naturel non nul.

Il existe un unique couple d'entiers (q; r) tel que $a=bq+r$ avec $0\leq r<b$.



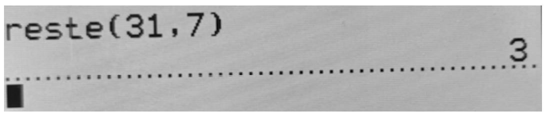
Remarque : Ce théorème s'étend pour le cas où *a* est un entier relatif.

Vocabulaire :

- Effectuer la **division euclidienne** de *a* par *b* consiste à trouver le couple (q ; r) du théorème précédent.
- *a* est appelé **dividende**, *b* est appelé **diviseur**, *q* est appelé **quotient** et *r* est appelé **reste** de la division euclidienne de *a* par *b* .

Exemple :

Proposition :
Soient *a* et *b* deux entiers, avec *b* non nul .
a est divisible par *b* si et seulement si le reste de la division euclidienne de *a* par *b* est nul.

Python :	Calculatrice TI :
Entrée[4]: `31%7 #reste dans la division euclidienne de 31 par 7` Sortie[4]: 3 Entrée[5]: `31//7 #quotient dans la division euclidienne de 31 par 7` Sortie[5]: 4	Touche math Menu NBRE puis 0↓reste(

III/ Logique et méthodes de démonstration.

Par l'absurde :

Par disjonction des cas :

Par équivalence :

Chapitre 2 : Découverte des matrices

Ce qu'il faut savoir faire :

I/ Les matrices.

Définition :
Une **matrice** est un tableau rectangulaire formé de n lignes et p colonnes de nombres (appelés **coefficients**). Sa taille (ou format) est $n \times p$.
On désigne souvent une matrice par une lettre majuscule

Exemple :

Définition :

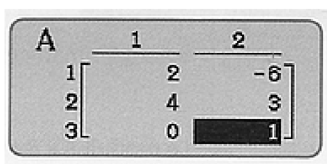
- Une matrice n'ayant qu'**une seule colonne** est appelée **matrice colonne**.
  Exemple :

- Une matrice n'ayant qu'**une seule ligne** est appelée **matrice ligne.**

  Exemple :

- Une matrice contenant **autant de lignes que de colonnes** est appelée **matrice carrée**.
  Exemple :

Méthode : Saisir une matrice sur la calculatrice.
Par `matrice` choisir Édit puis 1:[A] Modifier la dimension 1×1 proposée. Entrer les coefficients en validant chacun par `entrer`



Définition générale :
Une matrice A de taille $n\times p$ (m, n entiers naturels non nuls) peut s'écrire de la forme ci-contre.
Les nombres a_{ij} pour $1\leq i\leq n$ et $1\leq j\leq p$ s'appellent les **coefficients** de la matrice.

On note $A=a_{(ij)1\leq i\leq n,1\leq j\leq p}$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Le coefficient a_{ij} est le nombre placé à la $i^{ème}$ ligne et $j^{ème}$ colonne.

Définition :

- Deux matrices A et B de même dimension sont égales si et seulement si leurs coefficients sont tous égaux (autrement dit pour tout i et pour tout j $a_{ij}=b_{ij}$)
- On appelle matrice nulle la matrice dont les coefficients sont 0.
- On appelle matrice identité d'ordre n la matrice carrée d'ordre n contenant uniquement des 1 sur sa diagonale principale et des 0 ailleurs.

  Exemple :

II/ Opérations.

Addition de matrices :
Si $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ sont deux matrices de même taille $n\times p$, leur somme $A+B$ est définie par $A+B=(c_{ij})$ où $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ pour $1\leq i\leq n$ et $1\leq j\leq p$.

$A+B=B+A$ **l'addition est commutative**

Exemple :

Multiplication par un réel :
Soit une matrice $A=(a_{ij})$ de taille $n\times p$ et λ un réel. La matrice λA est la matrice b_{ij} définie par $b_{ij}=\lambda a_{ij}$ pour $1\leq i\leq n$ et $1\leq j\leq p$.

Exemple :

Multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne :

Soit $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix}$ une matrice ligne $1\times n$ et $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$ une matrice colonne $n\times 1$.

Alors $A\times B=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}=a_1\times b_1+a_2\times b_2+...+a_n\times b_n$.

Exemple :

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour calculer $A\times D$ on effectue le calcul ainsi :

Multiplication de deux matrices :

Soit $A=(a_{ij})$ de taille $n\times \boldsymbol{p}$ et $B=(b_{ij})$ de taille $\boldsymbol{p}\times q$

Alors le produit $A\times B$ est la matrice *C* de taille $n\times q$ dont chaque coefficient c_{ij} est le produit de la ligne *i* de *A* par la colonne *j* de *B* pour $1\leq i\leq n$ et $1\leq j\leq q$.

Exemple :

$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ pour calculer $A\times B$ on effectue le calcul ainsi :

Remarques :

- Si la matrice A n'a pas le même nombre de colonnes que le nombre de lignes de la matrice B, alors $A \times B$ n'existe pas.
- Le produit de deux matrices **n'est pas commutatif** (en général $A \times B \neq B \times A$).
- Si $A \times B = A \times C$ on ne peut pas en déduire que $B = C$.
- Si $A \times B = 0$ on ne peut pas déduire que $A = 0$ ou $B = 0$.

Propriétés :

- Le produit de matrices est **associatif** :

  si A est de taille $n \times p$, B de taille $p \times q$ et C de taille $q \times r$, alors on a: $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.
- Le produit de matrices est **distributif** par rapport à la somme de matrices : si A, B et C sont de dimensions telles que les produits aient un sens, alors on a : $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ et $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
- Produit par un réel λ : $(\lambda A) \times B = \lambda (A \times B)$ et $A \times (\lambda B) = \lambda (A \times B)$.
- Multiplier une matrice A de taille $n \times p$ par l'identité ne modifie pas la matrice: $I_n \times A = A$ et $A \times I_p = A$.

Définition :

Soit A une matrice carrée d'ordre n, et k un entier naturel non nul,
on appelle puissance $k^{ième}$ de A, est la matrice $A^k = A \times A \times A \times ... \times A$

Exemple :

III/ Matrices inversibles.

Définition :

- Soit A une matrice carrée d'ordre n. On dit que A est **inversible** si et seulement si il existe une matrice carrée d'ordre n , notée A^{-1} et telle que $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$.
- La matrice A^{-1} est alors unique et appelée la **matrice inverse** de A.

Exemple :

$\begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ -2 & 1,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ -2 & 1,5 \end{pmatrix}$

Propriété : Soit A une matrice carrée d'ordre d'ordre 2, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

- La matrice A est inversible si et seulement si $ad-bc\neq 0$.
- Le réel $ad-bc\neq 0$ est appelé **déterminant** de la matrice A et noté Δ .
- Si $ad-bc\neq 0$ alors $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exemple :

IV/ Matrices et systèmes linéaires.

Exemple :

On considère le système aux inconnues x_1, x_2 et x_3 suivant : $\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3 & = & -1 \\ x_1+\ x_2-5x_3 & = & 2 \\ -4x_1+3x_2 & = & 6 \end{cases}$.

On peut l'écrire sous la forme matricielle suivante :

Propriétés :

- Un système linéaire à n équations à n inconnues peut s'écrire sous une forme matricielle $AX=Y$ où A est une matrice carrée d'ordre n, X et Y sont des matrices colonnes de taille $n\times 1$.
- Si A est inversible, le système a alors une unique solution donnée par $X=A^{-1}\times Y$.

Exemple :

Chapitre 3: Découverte des nombres complexes.

I/ Introduction.

Théorème et définitions :

- Il existe un nombre dit imaginaire noté i solution de l'équation $x^2+1=0$, c'est à dire tel que $i^2=-1$.

- On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des **nombres complexes** qui s'écrivent de façon unique sous la forme $z=x+i\,y$ où x et y sont des nombres réels.
  - Cette forme est appelée la **forme algébrique** de z.
  - x est appelé **partie réelle** de z et on note $x = \mathrm{Re}\,(z)$.
  - y est appelé **partie imaginaire** de z et on note $y = \mathrm{Im}\,(z)$.

- Un nombre complexe de partie réelle nulle est appelé **imaginaire pur**.

Exemples :

Propriétés :

- $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$ (un nombre réel est un nombre complexe de partie imaginaire nulle).
- Les opérations (sommes, produit) et les règles de calcul prolongent sur $\mathbb{C}$ celles définies sur $\mathbb{R}$.
- Tout nombre complexe z non nul admet dans $\mathbb{C}$ un inverse noté $\frac{1}{z}$.
- Soit z' un nombre complexe non nul, on définit le quotient $\frac{z}{z'}$ par : $\frac{z}{z'}=z\times\frac{1}{z'}$

Exemples :

Théorèmes :

- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.
- Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle est nulle et sa partie imaginaire est nulle.

II/ Propriétés.

Définition : Soit $z \in \mathbb{C}$ de forme algébrique $z = x + i\,y$ avec $(x\,;\,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
On définit le **conjugué** de z noté $\overline{z}$ le nombre complexe $\overline{z} = x - i\,y$.
Exemple :

Propriétés :
- Un nombre complexe z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$.
- Un nombre complexe z est réel si et seulement si $z = -\overline{z}$.

Démonstration :

Proposition : Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Alors :

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ • $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$ • $\overline{z_1^n} = \overline{z_1}^n$ • pour $z_2 \neq 0$ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Théorème : Soit $z = x + i\,y$ avec $(x\,;\,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors :

- $z \times \overline{z} = x^2 + y^2$ • si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{x^2 + y^2}$

Démonstration :

Propriété : Soit $z \in \mathbb{C}$ de forme algébrique $z = x + i\,y$ avec $(x\,;\,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$