Exercice 1

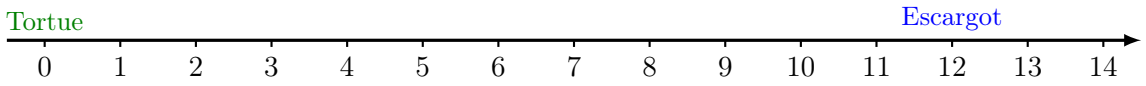
— Sur un axe gradué en mètres, on organise une course entre une tortue et un escargot.

— La tortue part du point d'abscisse $x = 0$. Elle se déplace vers la droite à une vitesse de 2 mètres par minute.

— L'escargot part du point d'abscisse $x = 12$. Il se déplace vers la droite à une vitesse de 50 centimètres par minute.

— Les deux concurrents partent en même temps.

À quel endroit la tortue rattrapera-t-elle l'escargot ?
(Toute trace de recherche, même infructueuse, sera prise en compte).



Exercice 2

En juin 2019, une population de 200 marmottes a été introduite dans un massif montagneux où cette espèce était absente. Un zoologue en charge de ce projet souhaite modéliser l'évolution de cette population en fonction du temps.
Il constate qu'entre juin 2019 et juin 2020, la population a augmenté de 20 individus.

Partie A : Premier modèle

Le zoologue propose un premier modèle où la population augmente de 20 individus tous les ans.
On note alors u_n la population de marmottes que l'on peut estimer à l'aide de ce modèle en juin $2019 + n$. On a donc $u_0 = 200$.

1. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser sa raison.
2. À combien peut-on estimer le nombre de marmottes en juin 2025 ?
3. En juin 2025, un nouveau décompte a permis de savoir que la population était de 355 individus. Ce premier modèle semble-t-il être adapté à la situation ?

Partie B : Second modèle

1. On rappelle que la population de marmottes était de 200 individus en juin 2019 et de 220 individus en juin 2020.
   De quel pourcentage la population a-t-elle augmenté entre ces deux dates ?

   Le zoologue propose un second modèle où la population augmente de ce même pourcentage tous les ans. Dans ce modèle, on représente la population de marmottes en juin $2019 + n$ par v_n tel que, pour tout entier naturel n, $\quad v_{n+1} = 1,1 \times v_n$.
2. (a) Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Préciser sa raison et son premier terme.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
3. On utilise un tableur pour calculer les termes de la suite (v_n).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	$v(n)$	200	220	242	266	293	322	354	390	429	472	519

   (a) Selon ce nouveau modèle, à combien peut-on estimer le nombre de marmottes en juin 2025 ?
   (b) En utilisant la donnée fournie dans la question **3** de la partie **A**, ce nouveau modèle semble-t-il pertinent ?
   (c) Au mois de juin de quelle année la population de marmottes de ce massif montagneux aura-t-elle dépassé 400 individus, selon ce modèle ?

Correction

Exercice 1

Soit t le temps écoulé en minutes.

- La tortue avance de 2 mètres par minute et part de l'abscisse 0. Sa position en fonction du temps est $x_T = 2t$.
- L'escargot avance de 50 cm (soit 0,5 mètre) par minute et part de l'abscisse 12. Sa position en fonction du temps est $x_E = 12 + 0,5t$.

La tortue rattrape l'escargot lorsque leurs positions sont identiques, soit $x_T = x_E$:

$$\begin{aligned} 2t &= 12 + 0,5t \\ 2t - 0,5t &= 12 \\ 1,5t &= 12 \\ t &= \frac{12}{1,5} = 8 \end{aligned}$$

La tortue rattrape l'escargot au bout de 8 minutes.
Pour trouver l'endroit de la rencontre, on calcule l'abscisse correspondante : $x_T = 2 \times 8 = 16$.
Conclusion : La tortue rattrapera l'escargot au point d'abscisse 16 mètres.

Exercice 2

Partie A : Premier modèle

1. L'évolution correspond à l'ajout d'une valeur constante (+20) chaque année. La suite (u_n) est donc une **suite arithmétique** de premier terme $u_0 = 200$ et de **raison** $r = 20$.
2. L'année 2025 correspond au rang $n = 2025 - 2019 = 6$. On calcule u_6 : $u_6 = u_0 + 6 \times r = 200 + 6 \times 20 = 200 + 120 = 320$. Selon ce modèle, on estime le nombre de marmottes à **320** en juin 2025.
3. L'estimation du modèle (320) est assez éloignée de la réalité (355). L'écart est de 35 marmottes, soit une erreur importante de plus de 10%. Ce premier modèle ne semble **pas très adapté** à la situation.

Partie B : Second modèle

1. Le pourcentage d'augmentation se calcule ainsi :

   $$\frac{220 - 200}{200} = \frac{20}{200} = 0,10 = 10\,\%$$

   La population a augmenté de **10 %** entre juin 2019 et juin 2020.

2. (a) Augmenter de 10 % revient à multiplier par $1 + \frac{10}{100} = 1,1$. On a la relation $v_{n+1} = 1,1 \times v_n$. La suite (v_n) est donc une **suite géométrique** de premier terme $v_0 = 200$ et de **raison** $q = 1,1$.

   (b) L'expression du terme général d'une suite géométrique est $v_n = v_0 \times q^n$, soit ici : $v_n = 200 \times 1,1^n$.

3. (a) L'année 2025 correspond toujours à $n = 6$. En lisant le tableur à la colonne **H**, on voit que pour $n = 6$, $v(n) = 354$. On estime donc la population à **354 marmottes** en juin 2025.

   (b) Le décompte réel était de 355 individus. L'estimation du modèle (354) en est extrêmement proche. Ce nouveau modèle semble donc **très pertinent**.

   (c) On cherche dans le tableau la première valeur de n pour laquelle $v(n) > 400$. On lit que $v(7) = 390$ et $v(8) = 429$. Le seuil de 400 individus est dépassé pour $n = 8$, ce qui correspond à l'année $2019 + 8 =$ **2027**.