**<u>Exercice 1 :</u> Bases**

On considère la propriété du cours : $1+2+3+...+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n\times(n+1)}{2}$ .

Par récurrence démontrer que cette propriété est vraie pour tout $n\geq 1$ .

**<u>Exercice 2 :</u> Bases**

On considère la suite $(u_n)$ de premier terme $u_0=0$ et telle que pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1}=u_n+2\text{n}-11$ .

1) Conjecturer une formule explicite de $(u_n)$ .
2) Démontrer cette formule par récurrence.

**<u>Exercice 3 :</u> Bases**

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0=2$ et pour tout entier naturel *n* par $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$

Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)$ est croissante, c'est à dire que $u_n\leq u_{n+1}$ pour $n\in\mathbb{N}$ .

**<u>Exercice 4:</u> Bases**

Démontrer par récurrence que $4^n-1$ est un multiple de 3 pour tout $n\geq 0$ .

**<u>Exercice 5:</u> Intermédiaire**

Soit *a* un réel strictement positif.

Pour tout entier naturel *n*, on note $P(n)$ la propriété $(1+a)^n\geq 1+na$ .

Démontrer cette propriété par récurrence.

**<u>Exercice 6 :</u> Intermédiaire**

On considère la propriété $P(n)$ suivante où *n* est un entier supérieur ou égal à 2 :

$P(n)$ : « Le nombre de cordes reliant *n* points distincts d'un cercle est égal à $\frac{n\times(n-1)}{2}$ .»

Démontrer cette propriété par récurrence.

**<u>Exercice 7 :</u> Révisions**

Pour chacune des suites ci-dessous, calculer $u_0$ (s'il n'est pas donné), $u_1$, $u_2$, $u_3$ et $u_4$.

1) *u* la suite définie par tout entier naturel *n* par $u_n=\frac{2n+1}{n+1}$ .
2) *u* la suite définie par tout entier naturel *n* par $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=2\text{u}_n+4 \end{cases}$ .
3) *u* la suite définie par tout entier naturel *n* par $\begin{cases} u_0=2 \\ u_1=-1 \\ u_{n+2}=2u_n-u_{n+1} \end{cases}$ .

**<u>Exercice 8 :</u> Révisions**

L'algorithme ci-contre utilise une suite *u* :

1) Comment est définie cette suite ?
2) Quel est la valeur de la variable *u* à la fin de l'exécution de cet algorithme si la valeur de la variable *N* en début d'exécution est 5 ?

```
u ⟵ 4
Pour k allant de 1 à N
u ⟵ 5 × u − 3
Fin Pour
```

**<u>Exercice 9:</u> Révisions**

Julien place une somme de 1000 euros au taux simple annuel de 5 %, c'est à dire que chaque année, la somme placée augmentera de 5 % de la somme initiale.
Pour tout entier naturel *n*, $u_n$ désigne le capital de Julien *n* années après son placement.
1) Quelle est la nature de la suite $(u_n)$ ? Donner sa forme par récurrence et sa forme explicite.
2) Au bout de combien d'années le capital de Julien sera-t-il supérieur à 1820 € ?

**<u>Exercice 10 :</u> Révisions**

Deux amis partent pour une randonnée de 200 km. Le premier jour, ils marchent 20 km. En raison de la fatigue la distance parcourue diminue de 5% par jour.
On pose $D_0=20$ et, pour tout entier naturel $n>0$, on désigne par $D_n$ la distance parcourue le jour *n*.
1) Quelle est la nature de la suite $(D_n)$ ? Donner sa forme par récurrence et sa forme explicite.
2) En combien de jours les amis pourront-ils terminer leur randonnée ?

**<u>Exercice 11 :</u> Bases**

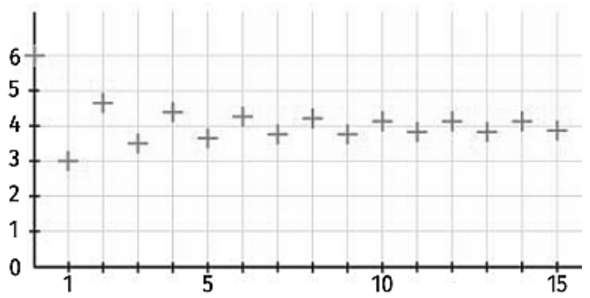
Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)$ :

| | | |
|---|---|---|
| 1) $u_n=2-\dfrac{1}{n}$ pour $n\geq 1$ | 2) $u_n=n^2-4n+3$ pour $n\geq 2$ | 3) $u_n=2^n$ pour $n\geq 0$ |

**<u>Exercice 12 :</u> Bases**

Dans chaque cas conjecturer la limite des suites représentées ci-dessous :

1)




2)

| n | $u_n$ | $v_n$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 2 |
| 1 | 2.718282 | 2.864665 |
| 2 | 14.77811 | 2.981684 |
| 3 | 60.25661 | 2.997521 |
| 4 | 218.3926 | 2.999665 |
| 5 | 742.0658 | 2.999955 |
| 6 | 2420.573 | 2.999994 |

**<u>Exercice 13:</u> Bases**

Soit $u_n=2n-5$ pour tout $n\geq 0$ .

1) Conjecturer la limite de la suite $(u_n)$ en $+\infty$ .
2) Résoudre l'inéquation $u_n>A$ d'inconnue *n* où *A* est un réel donné.
3) Justifier que la suite $(u_n)$ a pour limite $+\infty$ .

**<u>Exercice 14:</u> Bases**

Soit $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ .

1) Conjecturer la limite de la suite $(u_n)$ en $+\infty$ .
2) À partir de quel entier *n*, $u_n$ appartient-il à :
   a) $]-0{,}1\,;0{,}1[$ b) $]-0{,}01\,;0{,}01[$ c) $]-10^{-6};10^{-6}[$
3) Quelle est la limite de la suite $(u_n)$ ?

**<u>Exercice 15 :</u> Bases**

Déterminer la limite de la suite $(u_n)$ définie pour $n \geq 1$ :

| | | |
|---|---|---|
| 1) $u_n=(n+2)\times(-n+3)$ | 2) $u_n=3n-5+\frac{1}{n}$ | 3) $u_n=\frac{3}{2n+4}$ |
| 4) $u_n=n^2+n-6$ | 5) $u_n=3n^2-4n+2$ | 6) $u_n=\frac{2n^2-4n+5}{3n^2}$ |
| 7) $u_{n+1}=u_n-2$ et $u_0=5$ | 8) $u_n=\frac{2n-4}{3+n}$ | 9) $u_n=-n+\sqrt{n}$ |

**<u>Exercice 16 :</u> Bases.**

Dans un laboratoire, on étudie une variété de bactéries dont la population augmente de 2 % toutes les heures. Au début de l'étude, le nombre de bactéries est de 5000.

On note $u_n$ le nombre de bactéries après *n* heures d'expérience. Ainsi, $u_0=5000$ .

1) Conjecturer le comportement de la suite quand *n* tend vers $+\infty$ .

2) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous permettant de connaître le nombre d'heures nécessaires pour que la population de bactéries dépasse 10 000.

```
n←0
u←.....
Tant que u ≤ 10000
        n←.....
        u←.....
```

3) Retranscrire cet algorithme en un programme Python.

**<u>Exercice 17 :</u> Intermédiaire.**

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0=\frac{1}{2}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ $u_{n+1}=\frac{u_n}{1+u_n}$ .

1) a) Démontrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$ , $u_n>0$ .
   b) En déduire le sens de variations de la suite $(u_n)$ .
2) On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$ , $v_n=\frac{1}{u_n}+1$ .
   a) Justifier que la suite $(v_n)$ est arithmétique. Préciser ses paramètres.
   b) Exprimer $v_n$ en fonction de *n* et en déduire l'expression de $u_n$ en fonction de *n*.
   c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)$ .