Chapitre 1: Les Suites

I/ Rappels de la classe de première.

Définitions :

- Une **suite numérique** est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
- L'image de l'entier *n* par la suite est notée u_n .
  On l'appelle **terme d'indice *n*** de la suite.
- Cette suite est notée (u_n) ou encore *u*.

$$n \longrightarrow \boxed{u} \longrightarrow u_n$$

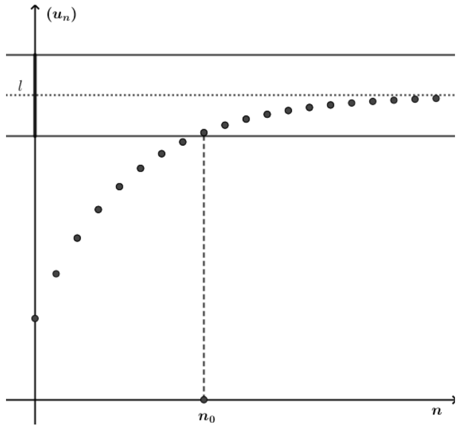
- **Explicite** : on exprime chaque terme de la suite en fonction de *n*. On calcule un terme en remplaçant *n* par le nombre entier correspondant. $u_n=-3n+5$
- **Par Récurrence :** on donne le premier terme de la suite et une méthode de calcul de u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n . On ne peut calculer un terme que si l'on connaît le précédent.
  $u_{n+1}=0{,}5u_n+3$ et $u_0=-2$
- **Sens de variation** :
  - Si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\le u_{n+1}$ alors on dit que (u_n) est croissante.
  - Si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}\le u_n$ alors on dit que (u_n) est décroissante.
  - Si l'on ajoute «strictement» au sens de variation cela veut dire que l'inégalité est stricte.
  - Sinon (u_n) n'est ni croissante ni décroissante, on dit qu'elle n'est pas monotone.

Suites particulières :

	Arithmétique (u_n) **raison *r* et 1er terme u_0**	**Géométrique** (v_n) **raison *q* et 1er terme v_0**
Récurrence	pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1}=u_n+r \end{cases}$	pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\begin{cases} v_0 \\ v_{n+1}=q\,v_n \end{cases}$
Explicite	pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=u_0+nr$ ou pour $k\in\mathbb{N}$ $u_n=u_k+(n-k)r$	pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=v_0q^n$ ou pour $k\in\mathbb{N}$ $v_n=v_kq^{n-k}$
Somme de termes	Pour $n\in\mathbb{N}^*$ $1+2+...+(n-1)+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n\times(n+1)}{2}$	Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $q\neq 1$ $1+q+q^2+...+q^{n-1}+q^n=\sum_{k=0}^{n} q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
Sens de variation	• $r<0$ (u_n) est strictement décroissante • $r>0$ (u_n) est strictement croissante • $r=0$ (u_n) est constante	• $0<q<1$ (v_n) strictement décroissante • $1<q$ (v_n) strictement croissante • $q=1$ (v_n) est constante • $q<0$ (v_n) n'est pas monotone

II/ Limite d'une suite.

1) Limite finie d'une suite (u_n) **(suite convergente)**



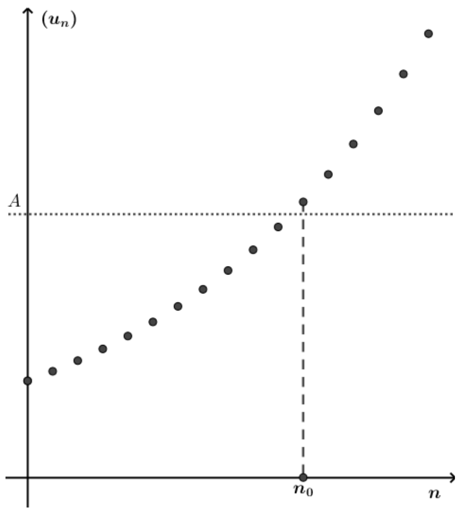
Définition :
On dit que la suite (u_n) a une limite finie *l* quand *n* tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant *l* contient toutes les valeurs de (u_n) à partir d'un certain rang.
On dit que (u_n) converge vers *l* quand *n* tend vers $+\infty$ et on note :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

Exemples :

- $v_n = 5 - \dfrac{1}{n}$
- $w_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

2) Limite infinie d'une suite (u_n) **(suite divergente)**



Définition :
On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) quand *n* tend vers $+\infty$, si tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ (respectivement $]-\infty\,;A[$) contient toutes les valeurs de (u_n) à partir d'un certain rang.

On note $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exemples :

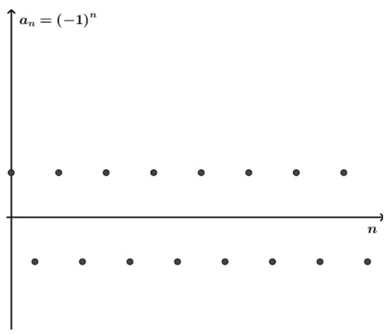
- $s_{n+1} = s_n + 4$ avec $s_0 = -2$
- $t_n = 2^n$

3) Suite sans limite **(suite divergente)**

Certaines suites n'ont ni de limite finie ni de limite infinie (elles n'ont pas de limite).

Exemples :

- $a_n = (-1)^n$



- $b_n = \sin(n)$

III/ Limites usuelles.

Propriétés :

$\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$	$\lim_{n\to+\infty} n^2=+\infty$	$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}=+\infty$	$q>1 \quad \lim_{n\to+\infty} q^n=+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}=0$	$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}=0$	$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}=0$	

IV/ Opérations sur les limites.

l et *l'* désignent deux nombres réels.

Somme

$\lim_{n\to+\infty} u_n+v_n$		$\lim_{n\to+\infty} u_n$		
		l'	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	l			
	$-\infty$			
	$+\infty$			

Produit

$\lim_{n\to+\infty} u_n\times v_n$		$\lim_{n\to+\infty} u_n$			
		$l\neq0$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	$l'\neq0$				
	0				
	$-\infty$				
	$+\infty$				

Quotient

$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$		$\lim_{n\to+\infty} u_n$			
		$l\neq0$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	$l'\neq0$				
	0				
	$-\infty$				
	$+\infty$				