Chapitre 1: Les Suites

I/ Raisonnement par récurrence.

Principes :
On cherche à démontrer qu'une propriété dépendante d'un entier naturel n est vraie pour $n \geq n_0$, n_0 étant un entier naturel donné.
On utilise cette méthode lorsque les démonstrations « classiques » sont difficiles. L'étude des suites se prête naturellement à la démonstration par récurrence.

Étape 1 : Initialisation
On montre que la propriété est vraie pour $n=n_0$

Étape 2 : Hérédité
On démontre que si la propriété est supposée vraie pour $k \geq n_0$ (hypothèse de récurrence) alors elle est vraie pour l'entier suivant $k+1$
(on dit que la propriété est héréditaire à partir du rang n_0)

Étape 3 : Conclusion
En combinant les étapes 1 et 2 et en procédant ainsi pas à pas on peut conclure que la propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$

Étape 1 : Initialisation
Le premier domino tombe

Étape 2 : Hérédité
Si un domino tombe, le suivant tombe aussi

Étape 3 : Conclusion
Tous les dominos tombent

Exemple :
Démontrer que $S_n=1+3+5+7+...+2n-1=n^2$ avec $n \geq 1$.

Initialisation :
$S_1=1$ et $1^2=1$ donc $S_1=1^2$ et la proposition est donc vraie pour $n=1$.

Hérédité :
Supposons qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que la proposition soit vraie au rang k : $S_k=k^2$
$S_{k+1}=1+3+5+7+...+2k-1+2(k+1)-1$
$S_{k+1}=S_k+2(k+1)-1$
$S_{k+1}=S_k+2k+1$
D'où $S_{k+1}=k^2+2k+1$ d'après l'hypothèse de récurrence.
C'est à dire $S_{k+1}=(k+1)^2$ et donc la proposition est vraie au rang $k+1$.

Conclusion :
Pour tout $n \geq 1$, $S_n=n^2$.

II/ Rappels de la classe de première.

Définitions :

- Une **suite numérique** est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

- L'image de l'entier *n* par la suite est notée $\boldsymbol{u_n}$.
  On l'appelle **terme d'indice *n*** de la suite.

- Cette suite est notée (u_n) ou encore *u*.

$$n \longrightarrow \boxed{u} \longrightarrow u_n$$

- **Explicite** : on exprime chaque terme de la suite en fonction de *n*. On calcule un terme en remplaçant *n* par le nombre entier correspondant. $u_n=-3n+5$

- **Par Récurrence :** on donne le premier terme de la suite et une méthode de calcul de u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n . On ne peut calculer un terme que si l'on connaît le précédent.
  $u_{n+1}=4u_n+8$ et $u_0=-1$

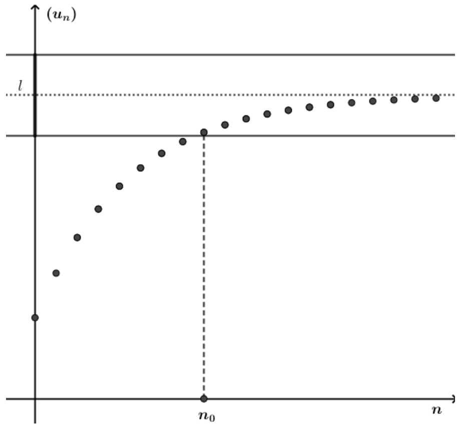
- **Sens de variation** :
  - Si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\leq u_{n+1}$ alors on dit que (u_n) est croissante.
  - Si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}\leq u_n$ alors on dit que (u_n) est décroissante.
  - Si l'on ajoute «strictement» au sens de variation cela veut dire que l'inégalité est stricte.
  - Sinon (u_n) n'est ni croissante ni décroissante, on dit qu'elle n'est pas monotone.

Suites particulières :

	Arithmétique (u_n) **raison *r* et 1er terme u_0**	**Géométrique (v_n)** **raison *q* et 1er terme v_0**
Récurrence	pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\begin{cases}u_0\\ u_{n+1}=u_n+r\end{cases}$	pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\begin{cases}v_0\\ v_{n+1}=q\,v_n\end{cases}$
Explicite	pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=u_0+nr$ ou pour $k\in\mathbb{N}$ $u_n=u_k+(n-k)r$	pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=v_0q^n$ ou pour $k\in\mathbb{N}$ $v_n=v_k q^{n-k}$
Somme de termes	Pour $n\in\mathbb{N}^*$ $1+2+...+(n-1)+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n\times(n+1)}{2}$	Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $q\neq 1$ $1+q+q^2+...+q^{n-1}+q^n=\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
Sens de variation	• $r<0$ (u_n) est strictement décroissante • $r>0$ (u_n) est strictement croissante • $r=0$ (u_n) est constante	• $0<q<1$ (v_n) strictement décroissante • $1<q$ (v_n) strictement croissante • $q=1$ (v_n) est constante • $q<0$ (v_n) n'est pas monotone

III/ Limite d'une suite.

1) Limite finie d'une suite (u_n) **(suite convergente)**



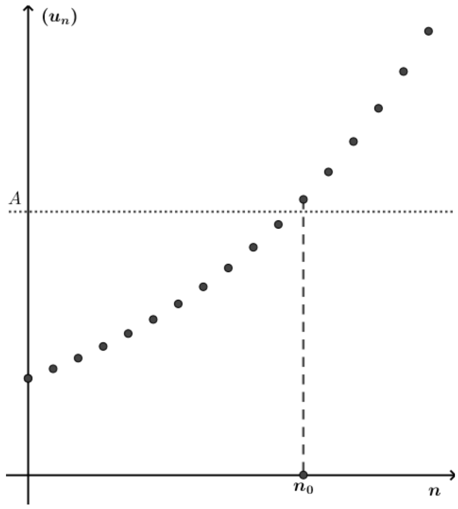
Définition :
On dit que la suite (u_n) a une limite finie *l* quand *n* tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant *l* contient toutes les valeurs de (u_n) à partir d'un certain rang.
On dit que (u_n) converge vers *l* quand *n* tend vers $+\infty$ et on note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l$$

Exemples :

- $v_n = 5 - \dfrac{1}{n}$
- $w_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

2) Limite infinie d'une suite (u_n) **(suite divergente)**



Définition :
On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) quand *n* tend vers $+\infty$, si tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ (respectivement $]-\infty\,;A[$) contient toutes les valeurs de (u_n) à partir d'un certain rang.

On note $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Exemples :

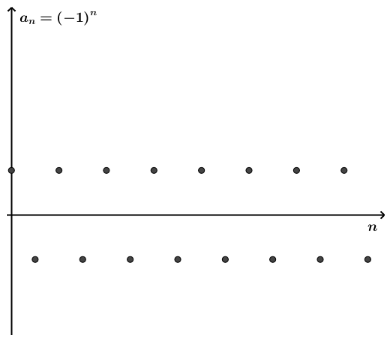
- $s_{n+1} = s_n + 4$ avec $s_0 = -2$
- $t_n = 2^n$

3) Suite sans limite (**suite divergente**)

Certaines suites n'ont ni de limite finie ni de limite infinie (elles n'ont pas de limite).

Exemples :

- $a_n = (-1)^n$



- $b_n = \sin(n)$

IV/ Limites usuelles.

Propriétés :

$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$	$\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$	$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$
$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$	$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$	$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

V/ Opérations sur les limites.

l et l' désignent deux nombres réels.

Somme

$\lim_{n \to +\infty} u_n + v_n$		$\lim_{n \to +\infty} u_n$		
		l'	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \to +\infty} v_n$	l	$l + l'$	$-\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I
	$+\infty$	$+\infty$	F.I	$+\infty$

Produit

$\lim_{n \to +\infty} u_n \times v_n$		$\lim_{n \to +\infty} u_n$			
		$l \neq 0$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \to +\infty} v_n$	$l' \neq 0$	$l \times l'$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
	0	0	0	F.I	F.I
	$-\infty$	$\pm\infty$	F.I	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$\pm\infty$	F.I	$-\infty$	$+\infty$

Quotient

$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n}$		$\lim_{n \to +\infty} u_n$			
		$l \neq 0$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \to +\infty} v_n$	$l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
	0	$\pm\infty$	F.I	$\pm\infty$	$\pm\infty$
	$-\infty$	0	0	F.I	F.I
	$+\infty$	0	0	F.I	F.I

Les cas $\pm\infty$ se déterminent avec la règle des signes.
F.I désigne une **forme indéterminée** qui se lève grâce à du calcul numérique ou à des propriétés.