Exercice d'approfondissement
Suites récurrentes linéaires d'ordre deux

Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre deux lorsqu'il existe deux réels *a* et *b* avec *b* non nul tels que, pour tout entier *n*, $u_{n+2}=a\,u_{n+1}+b\,u\,n$.
Pour une telle suite, on appelle (E) : $r^2=ar+b$ l'équation caractéristique.
Dans la suite, (u_n) désignera une suite récurrente linéaire d'ordre deux de premiers termes u_0 et u_1 .

On suppose que l'équation (E) admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 .
On va montrer que, pour une telle suite, il existe deux uniques nombres réels λ et μ tels que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\lambda\,r_1^n+\mu\,r_2^n$.

1. On suppose que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\lambda\,r_1^n+\mu\,r_2^n$.
Calculer λ et μ en fonction de u_0 , u_1 et u_2 **.**

2. Pour tout entier naturel *n*, on note P(*n*) la proposition $u_n=\lambda\,r_1^n+\mu\,r_2^n$.
a. Vérifier que P(0) et P(1) sont vraies.
b. Soit *k* un entier naturel tel que P(*k*) et P(*k*+1) sont vraies. Montrer alors que P(*k*+2) est également vraie.
c. En déduire que P(*n*) est vraie pour tout entier naturel *n* puis conclure.

3. Application : On appelle **suite de Fibonacci** la suite (u_n) définie par $u_0=u_1=1$ et la relation, valable pour tout entier naturel *n*, $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$.
Écrire l'équation caractéristique associée, la résoudre, puis exprimer, pour tout entier naturel *n*, u_n en fonction de *n*.

Source Lelivrescolaire

La suite de Fibonacci possède de nombreuses propriétés et peut constituer un sujet pour le grand oral.