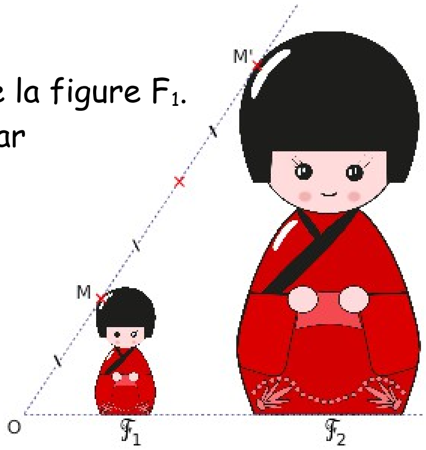
Chapitre 2 :
Homothétie et triangles semblables

I) Homothétie

1) Introduction

La figure F_2 est un agrandissement de rapport 3 de la figure F_1.
On dit que la figure F_2 est l'image de la figure F_1 par l'homothétie de centre O et de rapport 3.

La figure F_1 est une réduction de rapport $\frac{1}{3}$ de la figure F_2.
On dit que la figure F_1 est l'image de la figure F_2 par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$.



2) Image d'un point

Exemple :

k > 0

k < 0

Remarques :

- Si k > 1 ou k < -1, la figure image est un **agrandissement** de la figure initiale.
- Si -1 < k < 0 ou 0 < k < 1, la figure image est une **réduction** de la figure initiale.

3) Propriétés de l'homothétie

Propriétés :

- Par une homothétie de rapport k, l'image :

- d'une droite est une droite qui lui est parallèle.

- d'un segment [MN] est un segment [M'N'] de longueur k × MN (si k > 0) ou - k × MN (si k < 0) et qui est parallèle à [MN] .

- L'Homothétie conserve l'alignement, les milieux et la mesure des angles.

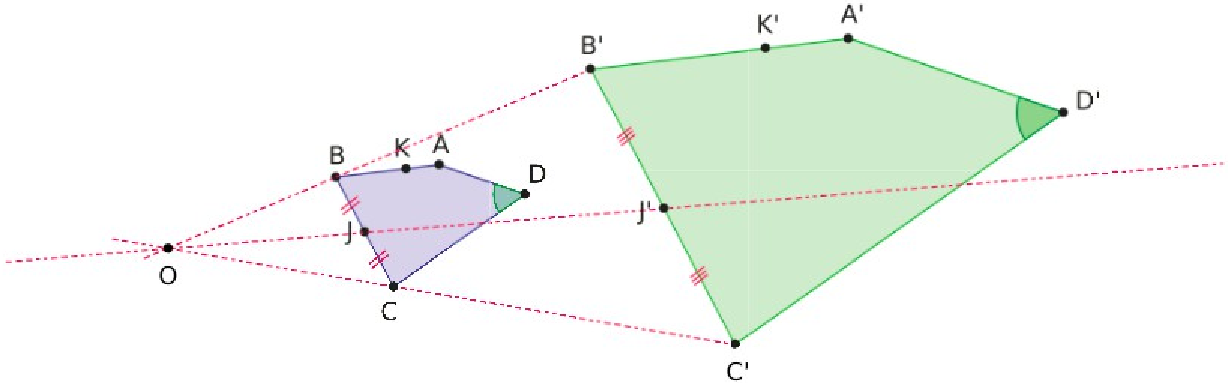
- Dans une homothétie de rapport k positif :

- les longueurs sont multipliées par k.

- Les aires sont multipliés par k^2.

Exemple :

Le quadrilatère A'B'C'D' est l'image de ABCD par l'homothétie de centre O et de rapport 2,5.



- Les points A, B, K sont alignés, donc leurs images respectives A', B', K' sont également alignées.
- Le point J est le milieu du segment [BC], donc son image J' est le milieu du segment [B'C'].
- L'angle $\widehat{A'D'C'}$ est l'image de l'angle $\widehat{ADC}$, ils ont donc la même mesure.
- Les longueurs sont multipliées par 2,5. Exemple : C'D' = 2,5 × CD
- Les aires sont multipliées par $2{,}5^2$ soit 6,25. Exemple : Aire(A'B'C'D') = 6,25 × Aire(ABCD)

II) Triangles semblables

1) Définition

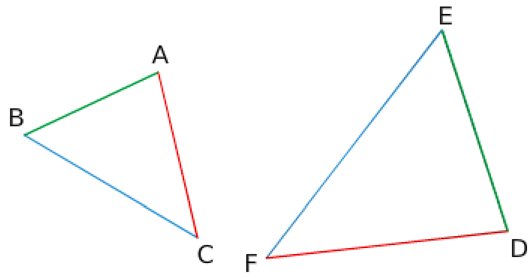
Deux triangles sont semblables si les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles.

Exemple : Les triangles ABC et DEF sont semblables.

Le tableau suivant est un tableau de proportionnalité.

Triangle ABC	AB	AC	BC
Triangle DEF	DE	DF	EF

Donc $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$.



Remarque :

Si deux triangles sont homothétiques (c'est-à-dire si l'un est l'image de l'autre par une homothétie), alors ils sont semblables.

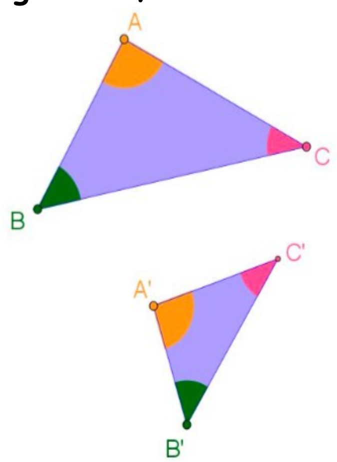
2) Propriétés

- Si deux triangles sont semblables, alors leurs angles ont, deux à deux, la même mesure.

Exemple :

Les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.

Donc : $\widehat{BAC}=\widehat{B'A'C'}$; $\widehat{ACB}=\widehat{A'C'B'}$ et $\widehat{CBA}=\widehat{C'B'A'}$



- Si deux triangles ont leurs angles de même mesure deux à deux, alors ils sont semblables.

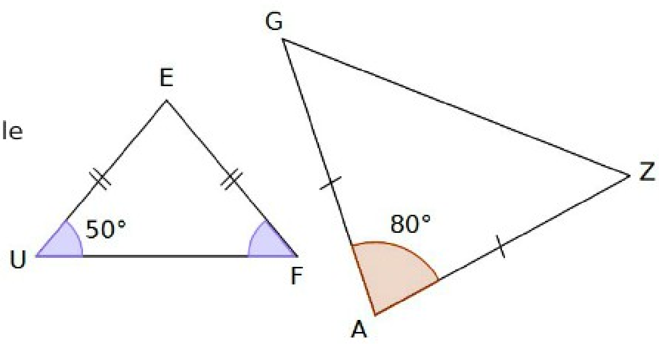
Exemple :

Le triangle FEU est isocèle en E,
donc $\widehat{EFU} = \widehat{EUF} = 50°$.

La somme des mesures des angles d'un triangle est 180°, donc $\widehat{FEU} = 180° - 2 \times 50° = 80°$.

GAZ est un triangle isocèle en A,
donc $\widehat{AGZ} = \widehat{AZG} = (180° - 80°) \div 2 = 50°$.

Les deux triangles ont leurs angles de même mesure 2 à 2, ils sont donc semblables.



Remarques :

- Cette propriété est la réciproque de la précédente.
- Deux triangles équilatéraux sont semblables.